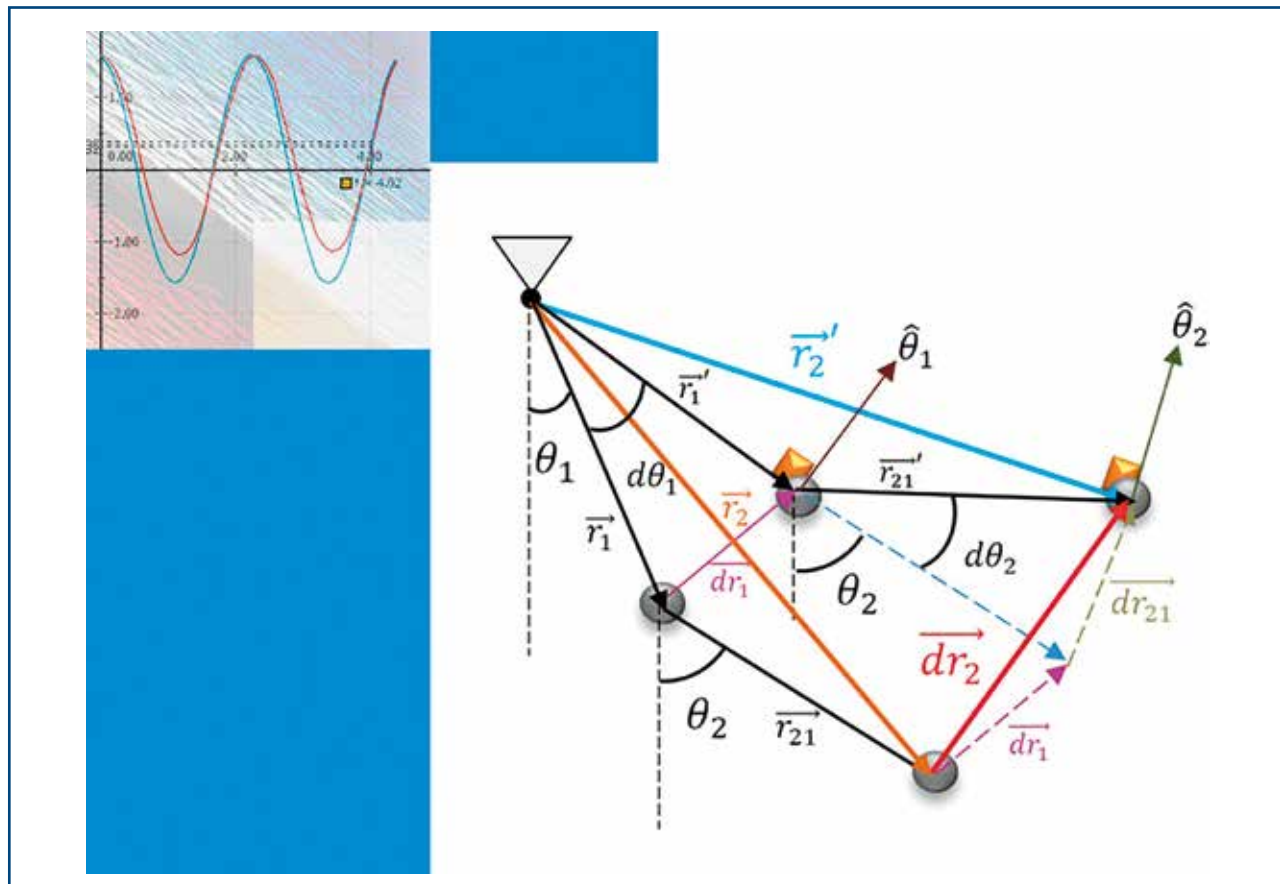


Pre•Impresos ^{Estudiantes} 10

Facultad de Ciencia y Tecnología Licenciatura en Física - 2016-II • ISSN: 2323-0193



Péndulo doble desde una perspectiva de sistemas dinámicos

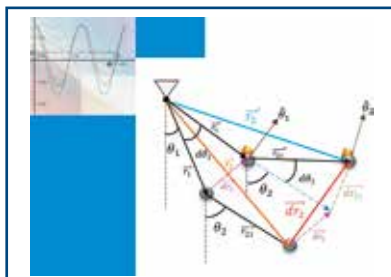
El péndulo doble como sistema dinámico

Walter Loren García Cruz
Germán Andrés Cuellar Estévez



UNIVERSIDAD PEDAGOGICA
NACIONAL

Educadora de educadores



Pre-impresos **10** Estudiantes

Adolfo León Atehortúa Cruz

Rector

Sandra Patricia Rodríguez Ávila

Vicerrectora de Gestión Universitaria

Mauricio Bautista Ballén

Vicerrector Académico

Luis Alberto Higuera Malaver

Vicerrector Administrativo y Financiero

Helberth Augusto Choachí González

Secretario General

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de Física

Rosa Inés Pedreros Martínez

Directora Departamento

Yecid Javier Cruz Bonilla

Coordinador Licenciatura en Física

María Mercedes Ayala Manrique

John Eduard Barragán Parra

Supervisión de contenido

Juan Carlos Bustos Gómez

Director de la revista

Samuel Eduardo Sediles Martínez

Coordinador de la revista

Juan Carlos Orozco Cruz

Ángela Milena Romero Reyes

Traducciones

© Universidad Pedagógica Nacional

© Germán Andrés Cuellar Estévez

© Walter Loren García Cruz

Portada e Imágenes

Germán Andrés Cuellar Estévez

Walter Loren García Cruz

Artículos publicados en diferentes medios escritos y referenciados en cada uno de los textos.

ISSN: 2323-0193

Diseño y Preparación editorial

Universidad Pedagógica Nacional

Grupo Interno de Trabajo Editorial 2016

Alba Lucía Bernal Cerquera

Coordinadora Grupo Interno de Trabajo Editorial

Viviana Vásquez

Editora de Revistas

Impreso por Xpress

Estudio Gráfico y Digital S.A.

Bogotá, Colombia

Péndulo doble desde una perspectiva de sistemas dinámicos

El péndulo doble como sistema dinámico

Resumen y Abstract	3
Introducción	3
Caracterización del sistema	4
Identificando partes móviles	4
Marco de referencia, disposición espacial y ligaduras del sistema	5
Estado de configuración	5
Determinación de los desplazamientos de las partes móviles en términos de θ_1 y θ_2	5
Coordenadas generalizadas	6
Estado de movimiento	7
Velocidades y momentos lineales	7
Momento generalizado $P\theta_1$ asociado a la coordenada generalizada θ_1	8
Momento generalizado θ_2 asociado a la coordenada generalizada θ_2	8
Energía potencial	9
Energía cinética	10
Hamiltoniano del sistema	12
Ecuación de Hamilton	12
Solución de las ecuaciones de Hamilton	13
Gráficas obtenidas de las soluciones de las ecuaciones de Hamilton	14
Consideraciones finales	18
Trabajos consultados	18

Presentación

La serie Pre-impresos Estudiantes es una iniciativa editorial del Proyecto Comunicación y Publicaciones de la Facultad de Ciencia y Tecnología (FCT), cuya idea central es trabajar por la cualificación de la escritura, para dar visibilidad a la producción intelectual de los maestros en formación y en ejercicio. Con esta publicación se busca tender puentes entre los saberes especializados y la cultura en general, además de contribuir al fortalecimiento de la docencia y la investigación en educación.

Asimismo, constituye una estrategia de comunicación que posibilita la circulación de información y promueve la reflexión sobre temas y actividades inherentes a las ciencias, la tecnología y su enseñanza. Con ella también se espera favorecer la integración de los equipos de trabajo y la construcción de relaciones de cooperación entre los diferentes miembros de la comunidad académica de la Facultad.

Estos aspectos, relacionados con los fines misionales de la Universidad Pedagógica Nacional, resultan pertinentes y significativos en la formación de nuevas generaciones de maestros e investigadores en el campo educativo, que en su futura práctica profesional afrontarán diversos retos y circunstancias que el entorno social del país le plantea a la educación.

Información:

pre_impresos@pedagogica.edu.co

jcbustos@pedagogica.edu.co

sesedilem@pedagogica.edu.co

Departamento de Física - UPN

Teléfonos: (57) (1) 3471190 / 5941894 Ext. 242

Péndulo doble desde una perspectiva de sistemas dinámicos

El péndulo doble como sistema dinámico

Walter Loren García Cruz

walo140690@hotmail.com

Germán Andrés Cuellar Estévez

german.andres.c.e@gmail.com

Resumen

El presente trabajo describe de forma analítica y gráfica el sistema “péndulo doble”, de acuerdo a la evolución de su movimiento en un periodo de tiempo, en este análisis, se utilizan herramientas teóricas y conceptuales de la mecánica hamiltoniana y de la geometría analítica. Se establecen las representaciones del movimiento, de las propiedades y de la configuración del sistema; posteriormente, se determina su energía mecánica, mediante la sumatoria de todos los trabajos tomando en cuenta el cambio de configuración y de movimiento, con el fin de establecer el estado mecánico del mismo en relación a los cambios que este presenta en el tiempo. En la descripción del sistema, se consideraron dos perspectivas: la descripción conservativa, la energía del sistema se mantiene constante, y la descripción disipativa, degradación de la energía del sistema. Este último tipo de descripción permite efectuar estudios sobre el comportamiento del sistema cuando este tiende a evolucionar, por lo que se privilegia este enfoque.

Abstract

In this document is described, in an analytical and graphical way, the double pendulum; because of the evolution of its movement in a period of time. Besides, in this analysis are used some theoretical and conceptual tools of Hamiltonian mechanics and analytic geometry. Likewise, there are established representations of movement, properties and system settings. Then, it is necessary to determine the mechanical energy through the summation of all the work involved in the configurational changes of the movement. Those in order to obtain the mechanical state of the system – taking into account the changes, it could have throughout the time. On the other hand, two perspectives were considered for this system description. First, conservative description. In that aspect the energy of the system keeps steady. Second, dissipative description. In other words, the degradation of the energy in the system. Also, the second perspective provides the possibility to study the system behavior even when this change. For that reason, the last approach is preferred.

Introducción

Este documento se origina en las reflexiones realizadas sobre los sistemas dinámicos en el año 2014, en el marco del espacio académico complementario dirigido por los profesores María Mercedes Ayala y John Barragán de la línea de profundización *Enseñanza de las ciencias desde una perspectiva cultural*, de la Licenciatura en Física de la Universidad Pedagógica Nacional. En su elaboración participaron, en un primer momento, Omar Vargas, Sandra Beltrán, Kevin Rojas, Walter García y German Andrés Cuellar, sin embargo, el desarrollo y culminación del análisis

final fue realizado por Walter García y Germán Andrés Cuellar para su publicación en la serie *Pre-Impresos Estudiantes*.

El trabajo tiene como fin la caracterización del péndulo doble o péndulo acoplado desde la perspectiva sistémica, dicho péndulo es un sistema caótico y, por tanto, se hace pertinente un abordaje no convencional como el que usualmente se hace en los libros de texto de la mecánica clásica (newtoniana) y de la mecánica hamiltoniana. Este documento brinda al

lector un estudio detallado del péndulo doble, que desarrolla de forma clara e ilustrada el comportamiento del mismo y pone a su disposición un *software* de interacción y análisis para propiciar una comprensión oportuna cualitativa y cuantitativa de dicho tema.

La forma que se ha destinado para la presentación del péndulo doble desde la mecánica de Hamilton es la siguiente: Inicialmente, se abordará la noción de sistema y caracterización del mismo, especificando las partes móviles, ligaduras y grados de libertad. Luego, se hará la descripción del sistema por medio de las cualidades de configuración y movimiento, las cuales determinarán las variables del sistema; por último, se hablará de la evolución que se obtendrá desde la función hamiltoniana, esta como elemento regulador de los cambios de movimiento y de configuración junto con las ecuaciones de Hamilton propias de la evolución de dicho sistema.

A través de los métodos numéricos y de acuerdo con las ecuaciones y las soluciones aquí planteadas y desarrolladas, nos valdremos de ciertos programas y lenguajes de programación para poder dar cuenta de la modelación que se pretende hacer:

- C++ es un procesador de programación. Con C++, y con apoyo del método numérico Runge-Kutta, se modelará un *software*, para procesar las ecuaciones de movimiento.
- Gnuplot es un programa graficador. Este servirá de apoyo para modelar de forma gráfica los resultados obtenidos por medio del *software* programado en el anterior programa especificado.
- Modellus 4.1 es un programa con el cual podemos ver de forma gráfica los datos que se le ingresen. Este programa mostrará las gráficas obtenidas con los resultados, gráficas adjuntas al trabajo, en ellas se muestra la información dinámica o evolución del sistema bajo ciertas características dadas.

Caracterización del sistema

Identificando partes móviles

A continuación, se puede observar el sistema péndulo-tierra (ilustración 1).

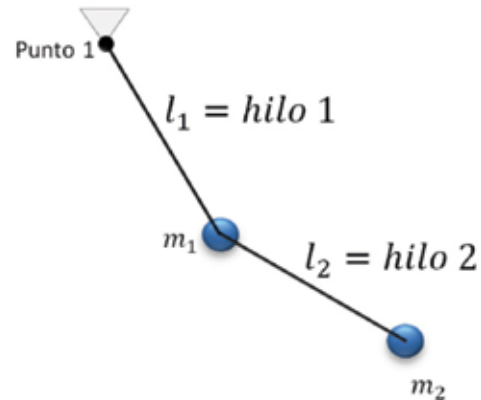


Ilustración 1. Representación del sistema péndulo doble

La identificación previa de las partes móviles del sistema a estudiar es pertinente en la medida que puede dar cuenta de todo el sistema con cada uno de los elementos que lo componen. Lo anterior es necesario para entrar a caracterizar el mismo. Las partes móviles son cuatro y están dadas de la siguiente forma:

- **Hilo 1:** Este hilo permite una interacción entre la tierra y la masa 1, también se comporta como una restricción del movimiento ya que no permite que se separe la masa del punto 1, cuyo hilo está atado al techo y no se toma como una componente. Consideraremos que este hilo se comporta como un alambre rígido, y a su vez despreciaremos su masa.
- **Hilo 2:** Este hilo tiene una doble funcionalidad, permite una interacción entre la masa 1 y la masa 2 y, a su vez, posibilita la interacción con el campo gravitatorio; también se comporta como una restricción del movimiento y no se toma como una componente. Consideraremos que este hilo, cuya masa despreciaremos, se comporta como un alambre rígido.

- **Masa 1 y masa 2:** Son las partes del sistema consideradas con anterioridad como partes móviles.

Marco de referencia, disposición espacial y ligaduras del sistema

Se tiene un sistema conformado por dos masas (m_1 y m_2) que dan cuenta de las partes móviles del mismo. Las masas están unidas por una cuerda, cuya masa no se tiene en cuenta, y el movimiento del sistema conformado por ellas queda restringido al plano x, y .

Ahora bien, el punto de referencia está situado en el techo (tierra), de allí se tomará el punto para sujetar el hilo (punto 1 de la ilustración 1). Asimismo, se considera que todo el sistema, al igual que los hilos, no se deforma y que estos hilos hacen parte de la ligadura del sistema.

En el sistema existen dos tipos de movimientos independientes. El de la m_1 que está sujeta al techo y el de m_2 que está sujeta a m_1 . Los hilos de los que penden siempre mantendrán la misma longitud. Las masas m_1 y m_2 describirán movimientos circulares respecto al punto de origen (m_1 respecto al techo y m_2 respecto a m_1).

El sistema tiene *dos grados de libertad*, entendidos como el número de movimientos simples que puede tener un cuerpo. Desde el punto 1 (ilustración 1), se procederá a determinar las variables que especifiquen la configuración o disposición espacial del sistema y las relaciones que lleguen a existir entre las masas.

Debido a que la descripción del movimiento del sistema en coordenadas cartesianas se torna muy extenso, se decidió hacer uso de un sistema de coordenadas polares; para m_1 , la variable asociada al movimiento es un cambio de un ángulo θ_1 ; y para m_2 , un cambio de ángulo θ_2 ; donde θ_1 y θ_2 varían con respecto al referente tomado, el plano vertical.

Las variables angulares θ_1 y θ_2 son valores en términos de cada posible configuración del sistema que se encuentran en el intervalo abierto de 0 a 2π .

Estado de configuración

Determinación de los desplazamientos de las partes móviles en términos de θ_1 y θ_2

Ya establecidas las coordenadas generalizadas q_i , para este caso θ_1 y θ_2 , el siguiente paso es la descripción de la evolución del sistema.

Al evolucionar el sistema en un instante de tiempo t , se tiene un cambio en las coordenadas generalizadas (θ_1 y θ_2), esto define las velocidades generalizadas. Para el análisis del desplazamiento, se hace importante describir dicho cambio en el tiempo de las coordenadas generalizadas.

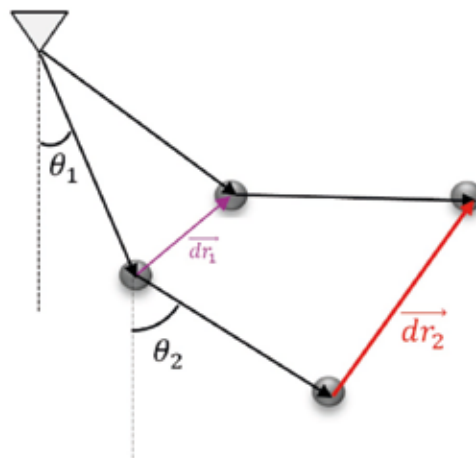


Ilustración 2. Representación del cambio de configuración del sistema

Con cada parte móvil del sistema se genera un movimiento y, por tanto, un cambio en las coordenadas generalizadas. De la observación de la variación de m_1 y m_2 , se puede proyectar las futuras posiciones de las coordenadas generalizadas para estas masas y con esto hallar las coordenadas generalizadas asociadas a este sistema, por lo que es necesario mirar en detalle cada elemento móvil por separado (ilustración 2).

Primero, se hará el análisis geométrico asociado a m_1 como se muestra en la ilustración 3.

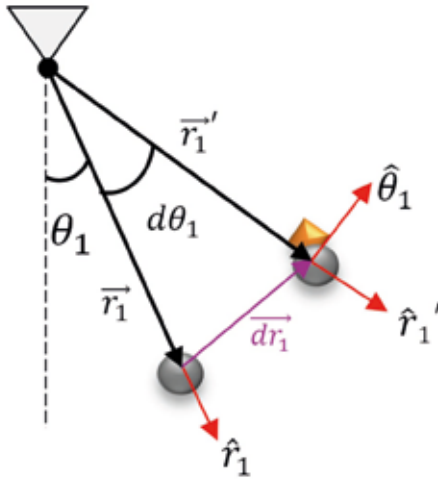


Ilustración 3. Representación del cambio de configuración en un instante de tiempo asociado a la masa m_1

Para la ilustración 3, se tiene que:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_1(\theta_1) \hat{\theta}_1 \quad (1)$$

(\vec{r}_1) es el vector que hace referencia a la posición de m_1 , en un primer instante, donde r_1 depende del cambio de (θ_1) .

$$\vec{r}_1' = \vec{r}_1'(\theta_1 + d\theta_1) \hat{\theta}_1 \quad (2)$$

Para un segundo instante se toma un \vec{r}_1' que hace referencia a la posición de m_1 cuando ha transcurrido una fracción de tiempo t , esto genera una variación de la coordenada generalizada de un θ_1 más un $d\theta_1$ ($\theta_1 + d\theta_1$).

Segundo, se procede a hacer el análisis para m_2 (ilustración 2), en este caso m_2 depende de las condiciones de θ_1 y θ_2 .

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1(\theta_1) \hat{\theta}_1 + \vec{r}_{21}(\theta_2) \hat{\theta}_2 \quad (3)$$

(\vec{r}_2) es el vector que hace referencia a la posición de m_2 , la cual depende del cambio de los vectores asociados a r_1 y r_{21} respecto a m_1 (ilustración 4).

$$\vec{r}_2' = \vec{r}_1'(\theta_1 + d\theta_1) \hat{\theta}_1 + \vec{r}_{21}'(\theta_2 + d\theta_2) \hat{\theta}_2 \quad (4)$$

Cuando m_1 y m_2 se han desplazado en un segundo instante, \vec{r}_2' es el vector asociado a la posición de m_2 , con relación a m_1 .

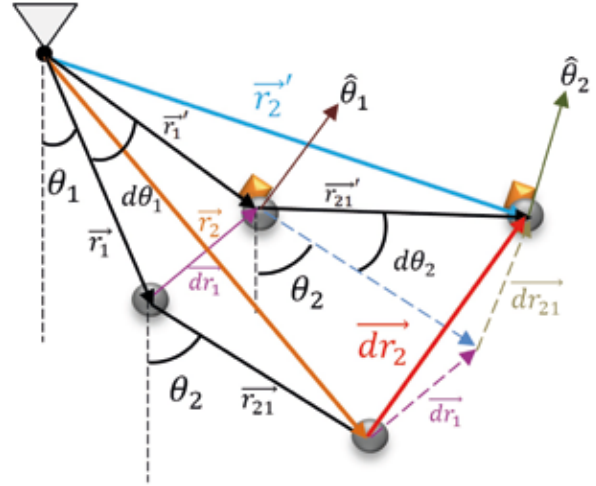


Ilustración 4. Representación del cambio de configuración en un instante de tiempo asociado a la masa m_2

Coordenadas generalizadas

El cambio de las coordenadas generalizadas asociado a m_1 está dado por $d\vec{r}_1$ y para m_2 , por un $d\vec{r}_2$.

Del análisis geométrico realizado se calcula el $d\vec{r}_1$ (ilustración 3):

$$d\vec{r}_1 = \vec{r}_1' - \vec{r}_1 \quad (5)$$

Reemplazando en (5) las expresiones (1) y (2) se tiene:

$$d\vec{r}_1 = [\vec{r}_1(\theta_1 + d\theta_1) - \vec{r}_1(\theta_1)] \hat{\theta}_1 \quad (6)$$

Por tanto:

$$d\vec{r}_1 = \vec{r}_1' \hat{\theta}_1 \quad (7)$$

De igual manera, se procede para hallar $d\vec{r}_2$:

$$d\vec{r}_2 = \vec{r}_2' - \vec{r}_2 \quad (8)$$

De la suma de las expresiones (3) y (4) se llega a la expresión (10)

$$d\vec{r}_2 = [\vec{r}_1(\theta_1 + d\theta_1) - \vec{r}_1(\theta_1)] \hat{\theta}_1 + [\vec{r}_{21}(\theta_2 + d\theta_2) - \vec{r}_{21}(\theta_2)] \hat{\theta}_2 \quad (9)$$

$$\overrightarrow{dr_2} = \overrightarrow{dr_1} \hat{\theta}_1 + \overrightarrow{dr_{21}} \hat{\theta}_2 \quad (10)$$

Al ser muy pequeño el $\overrightarrow{dr_2} \hat{\theta}_1$ y el $\overrightarrow{dr_{21}} \hat{\theta}_2$, la variación de las expresiones (7) y (10) se asume como la longitud de un arco, $s = r\theta$ (ilustraciones 3 y 4), de tal manera que $\overrightarrow{dr_1}$ y $\overrightarrow{dr_2}$ se pueden expresar en términos de las coordenadas generalizadas, lo cual dará como resultado:

$$\overrightarrow{dr_1} = l_1 d\theta_1 \hat{\theta}_1 \quad (11)$$

$$\overrightarrow{dr_2} = l_1 d\theta_1 \hat{\theta}_1 + l_2 d\theta_2 \hat{\theta}_2 \quad (12)$$

Finalmente, se obtienen las expresiones (11) y (12) que son las coordenadas generalizadas del sistema.

Estado de movimiento

La caracterización del estado de movimiento se hace de forma similar a la del estado de configuración. Es necesario introducir variables dinámicas para dicha caracterización, las cuales son útiles para hallar los momentos generalizados con los que se pueden designar los movimientos independientes del sistema, es decir, que el movimiento es independiente del sistema cuando varía θ_1 y cuando varía θ_2 . Se suele designar P_j al *momentum* generalizado,¹ como se ve a continuación:

$$P_j dq_j = \sum_{i=1}^2 \vec{P}_i * \overrightarrow{dr_{ij}} \quad (13)$$

Donde i representa las partes móviles del sistema y j los movimientos independientes del sistema, o sea, los grados de libertad del sistema. Los \vec{P}_i representan las coordenadas de configuración asociadas a cada movimiento y dq_j son las coordenadas generalizadas. La sumatoria de \vec{P}_i muestra el *momentum* de las partículas $m_i v_i$ cuando varía un dq_j .

¹ Los momentos generalizados se consideran como variables que son independientes de las variables de configuración, ya que se suele atribuir los cambios de movimiento a variables temporales y no como un modo de estar de los cuerpos o cualidad que se les puede asignar.

Particularmente, este sistema tiene dos partes móviles (m_1, m_2), cuyos movimientos independientes son θ_1, θ_2 , por tanto:

$$i = 2; j = \theta_1, \theta_2 \quad (14)$$

Teniendo en cuenta las expresiones (13) y (14) se procede a calcular los momentos generalizados asociados a cada una de las coordenadas generalizadas, es decir, que al final de los cálculos se tendrán dos expresiones:

$$P_{\theta_1} d\theta_1 = \vec{P}_1 * \overrightarrow{dr_{1\theta_1}} + \vec{P}_2 * \overrightarrow{dr_{2\theta_1}} \quad (15)$$

$$P_{\theta_2} d\theta_2 = \vec{P}_1 * \overrightarrow{dr_{1\theta_2}} + \vec{P}_2 * \overrightarrow{dr_{2\theta_2}} \quad (16)$$

Velocidades y momentos lineales

Una vez establecidos los momentos generalizados se toman los momentos lineales de cada una de las partículas, acorde a la ecuación de *momentum* ($\vec{P} = m \cdot \vec{v}$)

$$\vec{P}_1 = m_1 \vec{v}_1 \quad (17) \quad \vec{P}_2 = m_2 \vec{v}_2 \quad (18)$$

Luego, se procede a calcular los momentos lineales, de acuerdo a las ecuaciones (17) y (18) de cada una de las masas del sistema, como se expresa a continuación:

$$\vec{P}_1 = m_1 \frac{\overrightarrow{dr_1}}{dt}, \vec{P}_2 = m_2 \frac{\overrightarrow{dr_2}}{dt}$$

Teniendo en cuenta las velocidades: $\vec{v}_1 = \frac{\overrightarrow{dr_1}}{dt}$ y $\vec{v}_2 = \frac{\overrightarrow{dr_2}}{dt}$ se procede a realizar las respectivas derivadas de las expresiones (11) y (12), llegando a:

$$\vec{v}_1 = \frac{d\theta_1}{dt} = l_1 \frac{d\theta_1}{dt} \hat{\theta}_1 = l_1 \dot{\theta}_1 \hat{\theta}_1 \quad (19)$$

$$\vec{v}_2 = \frac{dr_2}{dt} = l_1 \frac{d\theta_1}{dt} \hat{\theta}_1 + l_2 \frac{d\theta_2}{dt} \hat{\theta}_2 = l_1 \dot{\theta}_1 \hat{\theta}_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \hat{\theta}_2 \quad (20)$$

Luego,

$$\vec{P}_1 = m_1 l_1 \dot{\theta}_1 \hat{\theta}_1 \quad (21) \quad \vec{P}_2 = m_2 (l_1 \dot{\theta}_1 \hat{\theta}_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \hat{\theta}_2) \quad (22)$$

Momento generalizado P_{θ_1} asociado a la coordenada generalizada θ_1

Según la expresión (15) y las consideraciones anteriores solo resta determinar $\vec{dr}_{1\theta_1}$, que determinará el desplazamiento que presenta m_1 cuando θ_1 varía un $d\theta_1$ y, de igual forma, para $\vec{dr}_{2\theta_1}$.

$$P_{\theta_1} d\theta_1 = \vec{P}_1 * \vec{dr}_{1\theta_1} + \vec{P}_2 * \vec{dr}_{2\theta_1} \quad (15)$$

Así que:

$$dr_{1\theta_1} = l_1 d\theta_1 \hat{\theta}_1 \quad (23) ; dr_{2\theta_1} = l_1 d\theta_1 \hat{\theta}_1 + l_2 d\theta_2 \hat{\theta}_2 \quad (24)$$

Si se mira con detalle a $\vec{dr}_{2\theta_1}$ de la expresión (24) se verá que \vec{dr}_2 está variando respecto a θ_1 de tal forma que θ_1 y θ_2 son ortogonales, $l_2 d\theta_2 \hat{\theta}_2 = 0$, de modo que:

$$dr_{2\theta_1} = l_1 d\theta_1 \hat{\theta}_1 \quad (25)$$

Enseguida se sustituyen las ecuaciones (17), (18), (23) y (25) en la expresión (15) y se procede a solucionar de la siguiente forma:

$$P_{\theta_1} d\theta_1 = \left(m_1 \frac{dr_1}{dt} \right) \cdot dr_{1\theta_1} + \left(m_2 \frac{dr_2}{dt} \right) \cdot dr_{2\theta_1}$$

$$P_{\theta_1} d\theta_1 = m_1 (l_1 \dot{\theta}_1 \hat{\theta}_1) \cdot (l_1 d\theta_1 \hat{\theta}_1) + m_2 (l_1 \dot{\theta}_1 \hat{\theta}_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \hat{\theta}_2) \cdot (l_1 d\theta_1 \hat{\theta}_1)$$

$$P_{\theta_1} d\theta_1 = m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1 d\theta_1 (\hat{\theta}_1 \cdot \hat{\theta}_1) + m_2 l_1^2 \dot{\theta}_1 d\theta_1 (\hat{\theta}_1 \cdot \hat{\theta}_1) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 d\theta_1 (\hat{\theta}_1 \cdot \hat{\theta}_2)$$

Teniendo en cuenta que el producto de dos vectores unitarios en la misma dirección es $(\hat{\theta}_1 \cdot \hat{\theta}_1) = 1$, se obtiene la expresión (26):

$$P_{\theta_1} d\theta_1 = l_1^2 \dot{\theta}_1 d\theta_1 (m_1 + m_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \hat{\theta}_1 (\hat{\theta}_1 \cdot \hat{\theta}_2) \quad (26)$$

Sin embargo, al hallar el producto punto de dos vectores unitarios diferentes $(\hat{\theta}_1 \cdot \hat{\theta}_2)$ se tiene:

$$\hat{\theta}_1 \cdot \hat{\theta}_2 = |\hat{\theta}_1| |\hat{\theta}_2| \cos(\alpha) \quad (27)$$

De la expresión (27), el ángulo que forma los dos vectores $(\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2)$ es α , sin embargo, como

son linealmente independientes y son los vectores base del sistema, la magnitud de cada uno de los vectores unitarios $(|\hat{\theta}_1| |\hat{\theta}_2|)$ es igual a 1. A partir de la ilustración 5 se puede ver el análisis geométrico entre los vectores unitarios $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$, de allí se determinará el ángulo α .

$$\hat{\theta}_1 \cdot \hat{\theta}_2 = 1 * \cos(\alpha) \quad \alpha = ?$$

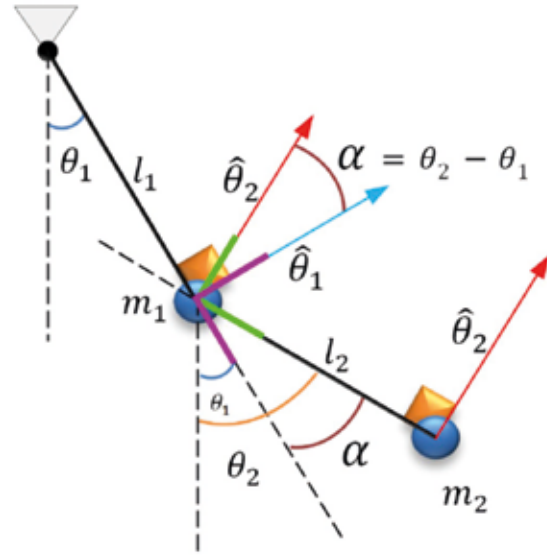


Ilustración 5. Representación del ángulo formado entre los vectores unitarios $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$

De modo que el ángulo α se obtiene de la diferencia que hay entre θ_1 (azul) y θ_2 (rojo), (ilustración 5).

$$\hat{\theta}_1 \cdot \hat{\theta}_2 = \cos(\theta_2 - \theta_1) \quad (28)$$

Se reemplaza el producto escalar (28), en la expresión (26), con esto se obtiene la expresión (29) de la siguiente forma:

$$P_{\theta_1} d\theta_1 = l_1^2 \dot{\theta}_1 d\theta_1 (m_1 + m_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 d\theta_1 \cdot \cos(\theta_2 - \theta_1)$$

$$P_{\theta_1} = l_1^2 \dot{\theta}_1 (m_1 + m_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \quad (29)$$

Momento generalizado P_{θ_2} asociado a la coordenada generalizada θ_2

Para hallar el momento generalizado P_{θ_2} , se parte de la expresión (16) y teniendo en cuenta ilustración 5 se sigue el mismo procedimiento

de la sección anterior, llegando a la expresión (30):

$$P_{\theta_2} d\theta_2 = \vec{P}_1 * \vec{dr}_{1\theta_2} + \vec{P}_2 * \vec{dr}_{2\theta_2} \quad (16)$$

Si se observa en detalle $dr_{1\theta_2}$, no hay un desplazamiento por parte de la masa m_2 cuando un θ_1 varia un $d\theta_1$, por tanto, el momento lineal de m_1 es 0 ($\vec{P} dr_{1\theta_2} = 0$) así que:

$$P_{\theta_2} d\theta_2 = \vec{P}_2 * \vec{dr}_{2\theta_2}$$

Teniendo en cuenta las consideraciones de la sección anterior, se procede a hallar el momento generalizado de P_{θ_2} de la siguiente forma:

$$P_{\theta_2} d\theta_2 = (m_2 \vec{v}_2) \cdot (l_2 \dot{\theta}_2 \hat{\theta}_2)$$

$$P_{\theta_2} d\theta_2 = m_2 (l_1 \dot{\theta}_1 \hat{\theta}_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \hat{\theta}_2) \cdot (l_2 d\theta_2 \hat{\theta}_2)$$

$$P_{\theta_2} d\theta_2 = m_2 l_1 \dot{\theta}_1 \hat{\theta}_1 + m_2 l_2 \dot{\theta}_2 \hat{\theta}_2 \cdot (l_2 d\theta_2 \hat{\theta}_2)$$

$$P_{\theta_2} d\theta_2 = m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 d\theta_2 (\hat{\theta}_1 \cdot \hat{\theta}_2) + m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 d\theta_2 (\hat{\theta}_2 \cdot \hat{\theta}_2)$$

$$P_{\theta_2} = m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 (\hat{\theta}_1 \cdot \hat{\theta}_2) + m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 (\hat{\theta}_2 \cdot \hat{\theta}_2)$$

Finalmente, se obtiene la expresión (30):

$$P_{\theta_2} = m_2 l_2 (l_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) + l_2 \dot{\theta}_2) \quad (30)$$

Energía potencial

La energía potencial² del sistema hace referencia al cambio que experimenta el sistema cuando cambia su configuración se asocia al sistema de cuerpos que interactúan entre sí. Para ello, se realiza un diagrama de fuerzas de cada una de las partículas del sistema (ilustración 6).

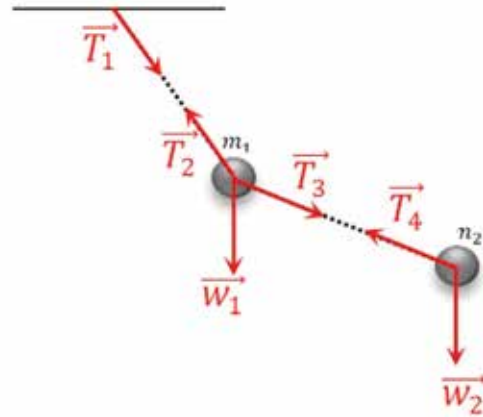


Ilustración 6. Diagrama de fuerzas de los cuerpos

En la descripción de cada una de las fuerzas y sus respectivas direcciones es necesario tener en cuenta que el eje coordenado está dado por los vectores unitarios $\hat{r}_1, \hat{r}_2, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{z}$, descritos en la (ilustración 7).

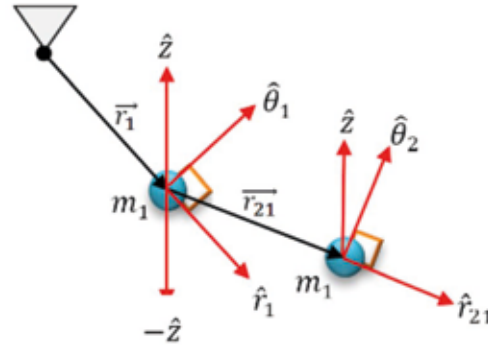


Ilustración 7. Representación de las coordenadas para analizar en sistema

Teniendo en cuenta las coordenadas de la ilustración 7, a partir de la ecuación de la energía potencial y la sumatoria de las fuerzas que intervienen en el sistema, la energía queda como:

$$\Delta U = -[\int \omega_1 \ell_1 \cos(\hat{\theta}_1, -\hat{z}) d\theta_1 + \int \omega_2 \ell_1 \cos(\hat{\theta}_1, -\hat{z}) d\theta_1 + \int \omega_2 \ell_1 \cos(\hat{\theta}_2, -\hat{z})] \quad (31)$$

Algunos de los productos punto del sistema son vectores unitarios ortogonales, de allí que el resultado del producto punto entre ellos sea

igual a cero, sin embargo, como algunos productos puntos no son perpendiculares entre sí, es necesario mirar el ángulo que relaciona a cada pareja de vectores unitarios para así aplicar la definición de $\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \cos \alpha_{AB}$, se tiene que:

Para θ_1 se tiene la ilustración 7:

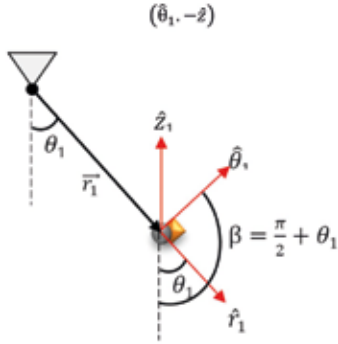


Ilustración 8. Representación del ángulo formado entre $\hat{\theta}_1$ y $-\hat{z}$

Se observa en la ilustración 8 que la suma de los ángulos θ_1 y β es igual a un ángulo θ_1 más 90° , por lo tanto, se tiene:

$$\beta = \frac{\pi}{2} + \theta_1$$

Para el caso de θ_2 se tiene la ilustración 9:

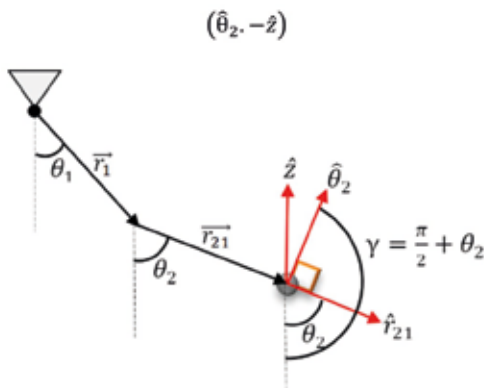


Ilustración 9. Representación del ángulo formado entre $\hat{\theta}_2$ y $-\hat{z}$

² $\Delta U = -\sum_i \int \vec{F}_{net,i} \cdot d\vec{r}_i$ se parte del hecho que la energía potencial es una función de configuración del sistema y las fuerzas que actúan son conservativas.

De la ilustración 9, se puede observar que el ángulo que forman los vectores unitarios θ_2 y γ (90°), se tiene entonces:

$$\gamma = \frac{\pi}{2} + \theta_2$$

De la expresión (31), al reemplazar los nuevos ángulos de la energía potencial del sistema, se obtiene la expresión (32).

Las identidades trigonométricas³ de los ángulos complementarios resueltas de la expresión (32), se deducen en la expresión (33), la cual al separar las constantes de las integrales ($\omega_1, \ell_1, \omega_2$, y ℓ_2) y al integrar queda la expresión (34) resultado de la suma de los trabajos realizados al cambiar la configuración.

$$\Delta U = -\left[\int \omega_1 \ell_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta_1\right) d\theta_1 + \int \omega_2 \ell_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta_1\right) d\theta_1 + \int \omega_2 \ell_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta_2\right) d\theta_2\right] \quad (32)$$

$$\Delta U = -\left[\int \omega_1 \ell_1 \sin \theta_1 d\theta_1 + \int -\omega_2 \ell_1 \sin \theta_1 d\theta_1 + \int -\omega_2 \ell_2 \sin \theta_2 d\theta_2\right] \quad (33)$$

$$\Delta U = -\omega_1 \ell_1 \cos \theta_1 - \omega_2 \ell_1 \cos \theta_1 - \omega_2 \ell_2 \cos \theta_2 \quad (34)$$

Energía cinética

La energía cinética,⁴ que es igual al trabajo realizado por el sistema para cambiar su movimiento, depende de las coordenadas generalizadas y de los momentos generalizados, lo cual hace posible usar la siguiente expresión:

$$H = H(q_j', p_j') = \sum p_j \dot{q}_j - L(q_j', p_j') \quad (35)$$

Basado en la expresión (35) se realiza una demostración que nos lleva a expresar el hamiltoniano en términos de la energía cinética y la energía potencial, lo que nos da la ecuación (36).

$$H = \sum p_j \dot{q}_j - (T - U) \quad (36)$$

Dado que el lagrangiano de un sistema es denotado como la diferencia de la energía potencial y de la energía cinética, se procede a

³ $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta_1\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos(\theta_1) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin(\theta_1)$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta_2\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos(\theta_2) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin(\theta_2)$

realizar los reemplazos bajo la transformación de Legendre, llegando a la expresión (37).

$$U + T = \sum p_j \dot{q}_j - (T - U) \quad (37)$$

La energía cinética del sistema depende de las coordenadas generalizadas y de los momentos, respectivamente; de simplificar la expresión (37) se llega a la expresión (38).

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 P_j \dot{q}_j \quad (38)$$

En la expresión (38), la energía cinética se plantea en términos de los momentos generalizados de m_1 y m_2 , de donde se obtiene:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 P \theta_j \dot{\theta}_j \quad (39)$$

Con la expresión (39), se podrá realizar el cálculo de la energía cinética, teniendo en cuenta los momentos generalizados dados, ya que son los que proporcionan toda la información y evolución del sistema.

$$\begin{bmatrix} P\theta \\ P\theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)\ell_1^2 & m_1\ell_1\ell_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \\ m_2\ell_1\ell_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) & m_2\ell_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (40)$$

Es importante resaltar que para el cálculo de la energía cinética hay que expresar las coordenadas generalizadas en términos de los momentos generalizados; por esto, es importante resolver el sistema de ecuaciones de los momentos generalizados expresados con anterioridad. Se propone un método de solución que consiste en encontrar la inversa de la matriz de transformación de la expresión (40),

se parte de la expresión (41) de la inversa de la matriz de transformación:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow \hat{A} = \frac{1}{\det} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ (m_1 + m_2)\ell_1^2 m_1 \ell_1^2 - (m_2^2 \ell_1^2 \ell_2^2 \cos(\theta_2 - \theta_1)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m_2 \ell_1^2 & -m_2 \ell_1 \ell_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \\ -m_2 \ell_1 \ell_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) & (m_1 + m_2) \ell_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P\theta_1 \\ P\theta_2 \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\ell_1^2 [(m_1 + m_2) - m_2 \cos^2(\theta_2 - \theta_1)]}{- \cos(\theta_2 - \theta_1)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} - \cos(\theta_2 - \theta_1) \\ m_2 \ell_1 \ell_2 [(m_1 + m_2) - m_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)] \\ (m_1 + m_2) \\ m_1 \ell_2^2 (m_1 + m_2) - m_2 \cos^2(\theta_2 - \theta_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P\theta_1 \\ P\theta_2 \end{bmatrix} \quad (43)$$

Todo el trabajo algebraico de las expresiones (42) y (43) corresponde a la energía cinética del sistema, hallada con el fin de determinar la evolución temporal del sistema y predecir el comportamiento para determinados casos.

Como ya se ha mencionado, para poder determinar la energía cinética lo prudente será mostrar su expresión haciendo uso de la ecuación (39). En general la expresión se muestra de la siguiente manera.

$$\Delta T = \frac{1}{2} [P\theta_1 \dot{\theta}_1 + P\theta_2 \dot{\theta}_2] \quad (44)$$

4 $\Delta T = - \sum_i \int_1^2 \vec{F}_{net,i} \cdot d\vec{r}_i = \sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_i \int_1^2 \frac{d(m_i \vec{v}_i)}{dt} \cdot \vec{v}_i = \sum_i \int_1^2 m_i \frac{d(\frac{1}{2} \vec{v}_i \vec{v}_i)}{dt} = \sum_i \int_1^2 \frac{d}{dt} (\frac{1}{2} m_i v_i^2)$

La expresión (44) está expuesta en términos de los momentos generalizados y sus velocidades. Las expresiones (42 y 43) al ser reempla-

zadas en la expresión (44), se llega a la expresión (45).

$$\Delta T = \frac{1}{2} \left[\frac{P\theta_1^2}{l_1^2[(m_1 m_2) - m_2 \cos^2(\theta_2 - \theta_1)]} - \frac{2 P\theta_1 P\theta_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}{m_2 \ell_1 \ell_2 [(m_1 + m_2) - m_2 \cos^2(\theta_2 - \theta_1)]} + \frac{P\theta_2^2 (m_1 + m_2)}{m_2 l_1^2 [(m_1 + m_2) - m_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)]} \right] \quad (45)$$

Ahora se cuenta con varias herramientas para desarrollar el hamiltoniano del sistema y las ecuaciones de Hamilton.

Hamiltoniano del sistema

El hamiltoniano describe el estado de un sistema mecánico, es la función que conecta los cambios de configuración con los cambios de movimiento del sistema. El hamiltoniano invo-

luca la energía cinética y la potencial, parte de la descripción que se puede realizar al analizar la evolución temporal del sistema, teniendo entonces que el hamiltoniano está descrito por la expresión (46):

Remplazando la energía cinética y potencial en función de los momentos generalizados da como resultado la expresión (47):

$$H = T(P\theta_j \dot{\theta}_j) + U \quad (46)$$

En función de los momentos generalizados y velocidades

$$H = \frac{1}{2} \left[\frac{P\theta_1^2}{l_1^2[(m_1 + m_2) - m_2 \cos^2(\theta_2 - \theta_1)]} - \frac{2 P\theta_1 P\theta_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}{m_2 \ell_1 \ell_2 [(m_1 + m_2) - m_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)]} + \frac{P\theta_2^2}{m_2 l_1^2 [(m_1 + m_2) - m_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)]} \right] + [-m_1 g \ell_1 \cos \theta_1 - m g_2 \ell_1 \cos \theta_1 - m g_2 \ell_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)] \quad (47)$$

Ecuación de Hamilton

El hamiltoniano será el encargado de asociar los cambios de configuración a cambios de movimiento del sistema, se interpreta como un sistema conservativo, los cambios de configuración del sistema se verán compensados con cambios de movimiento de tal manera que el cambio será nulo, es decir, el hamiltoniano no es función del tiempo (expresión 48), y por lo tanto su derivada respecto al tiempo es nula, lo cual implica su conservación en la evolución del sistema.

El hamiltoniano se comporta como una constante, de tal suerte que proporciona superficies (planos verticales) donde la energía siempre va a ser la misma, para hablar de este tipo de cambios de diferente magnitud se presenta la expresión (48), descrita de la función hamiltoniana con respecto a las coordenadas generalizadas y a los momentos generalizados.

$$\begin{bmatrix} P\dot{\theta}_1 \\ P\dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-\partial H}{\partial \theta_1} \\ \frac{-\partial H}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial H}{\partial P\theta_1} \\ \frac{\partial H}{\partial P\theta_2} \end{bmatrix} \quad (48)$$

Este sistema de ecuaciones diferenciales acopladas contienen toda la dinámica del sistema,

para nuestro sistema son de forma separada expresión (49) y (50), respectivamente.

$$\begin{bmatrix} P\dot{\theta}_1 \\ P\dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{aligned} & \frac{l_1^2 m_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \cos(\theta_2 - \theta_1) P\theta_1^2}{[l_1^2 ((m_1 + m_2) - m_2 \cos^2(\theta_2 - \theta_1))]^2} + \\ & \frac{P\theta_1 \theta_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) * (m_2 l_1 l_2 [(m_1 + m_2) - m_2 \cos^2(\theta_2 - \theta_1)] + 2l_1 l_2 m_1^2 \cos(\theta_2 - \theta_1)) * \sin(\theta_2 - \theta_1) P\theta_1 P\theta_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}{[m_2 l_1 l_2 ((m_1 + m_2) - m_2 \cos^2(\theta_2 - \theta_1))]^2} + [m_1 g l_1 \sin\theta_1 + \\ & m_2 g l_1 \sin\theta_1] - \left[\frac{-l_1^2 m_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \sin(\theta_2 - \theta_1) P\theta_2^2}{[m_2 l_1 l_2 ((m_1 + m_2) - m_2 \cos^2(\theta_2 - \theta_1))]^2} + \right. \\ & \frac{P\theta_1 P\theta_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) [m_2 l_1 l_2 (m_1 - m_2) - m_2 \cos^2(\theta_2 - \theta_1)] - 2m_1^2 l_1 l_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \sin(\theta_2 - \theta_1) P\theta_1 P\theta_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}{[m_2 l_1 l_2 ((m_1 + m_2) - m_2 \cos^2(\theta_2 - \theta_1))]^2} - \\ & \left. \frac{m_2^2 l_1^2 \cos(\theta_2 - \theta_1) * \sin(\theta_2 - \theta_1) P\theta_2^2}{[m_2 l_1 l_2 ((m_1 + m_2) - m_2 \cos^2(\theta_2 - \theta_1))]^2} + (m_2 g l_2 \sin\theta_2) \right] \end{aligned} \right] \quad (49)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{aligned} & \frac{P\theta_1 * [l_1^2 ((m_1 + m_2) - m_2 \cos^2(\theta_2 - \theta_1))]}{[l_1^2 ((m_1 + m_2) - m_2 \cos^2(\theta_2 - \theta_1))]^2} \\ & - \frac{P\theta_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) * [m_2 l_1 l_2 ((m_1 + m_2) - m_2 \cos^2(\theta_2 - \theta_1))]}{[m_2 l_1 l_2 ((m_1 + m_2) - m_2 \cos^2(\theta_2 - \theta_1))]^2} \\ & - \left[\frac{P\theta_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) * [m_2 l_1 l_2 ((m_1 + m_2) - m_2 \cos^2(\theta_2 - \theta_1))]}{[m_1 l_1 l_2 ((m_1 + m_2) - m_2 \cos^2(\theta_2 - \theta_1))]^2} \right. \\ & \left. + \frac{P\theta_2 [m_2 l_1^2 ((m_1 + m_2) - m_2 \cos^2(\theta_2 - \theta_1))]}{m_2 l_1^2 [(m_1 + m_2) - m_2 \cos^2(\theta_2 - \theta_1)]^2} \right] \end{aligned} \right] \quad (50)$$

Solución de las ecuaciones de Hamilton

Para la solución de las ecuaciones de Hamilton, se procede a utilizar el método de Runge-Kutta que es un método genérico interactivo, explícito e implícito, de resolución numérica de ecuaciones diferenciales por medio de un compilador de C++. Con este compilador se realizaron unas descripciones de las ecuaciones diferenciales, ecuaciones de Hamilton, con el único fin de tener los momentos generalizados y las coordenadas generalizadas como una evolución temporal y con estas poder hacer descripción del sistema.

Se podrá hacer una descripción del sistema para determinar un estado inicial y este estado determinará el siguiente, formando así un sistema continuo que permitirá hablar del sistema en cualquier intervalo de tiempo. En la ilustración 10, se muestra la programación requerida para solucionar el sistema de ecuaciones, se definen las variables del sistema como lo son m_1, m_2, l, r, g , el tiempo inicial, el tiempo final y el número de paso, es decir, el número de iteraciones a realizar por el método numérico.⁵

⁵ Para interactuar con la modelación se puede seguir el siguiente hipervínculo: <https://1drv.ms/f/s!AggFMmCnaURngWq9zuw-9WhWZWou>

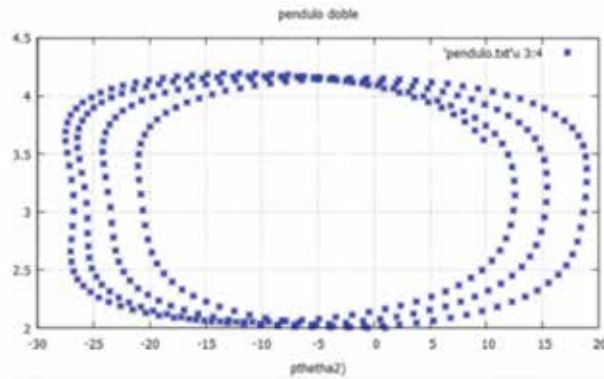


Ilustración 15. Gráfica de $P\theta_2$ contra θ_1

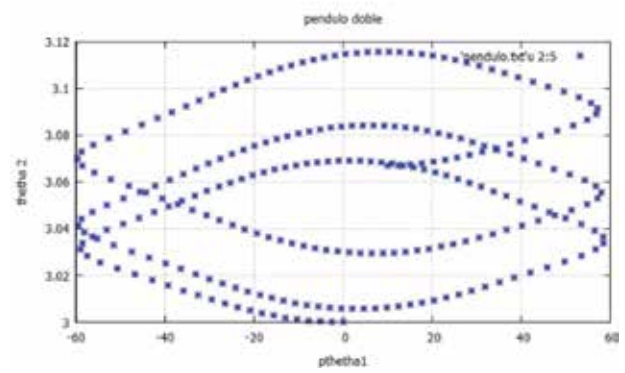


Ilustración 19. Gráfica de $P\theta_1$ contra θ_2

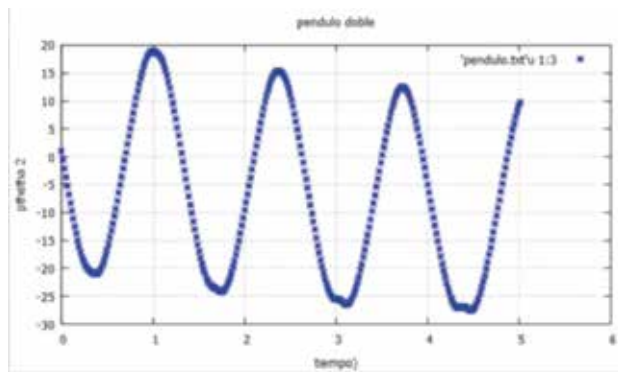


Ilustración 16. Gráfica de $P\theta_2$ contra t

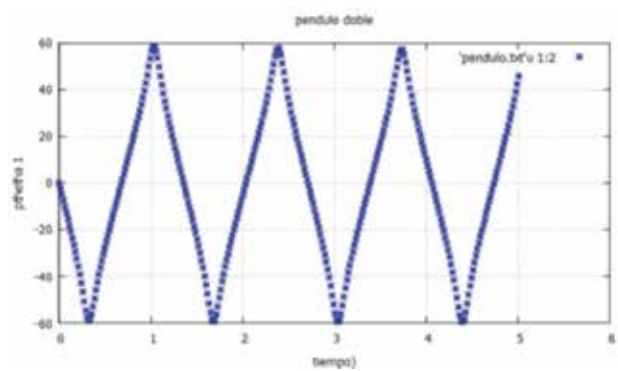


Ilustración 17. Gráfica de $P\theta_1$ contra t

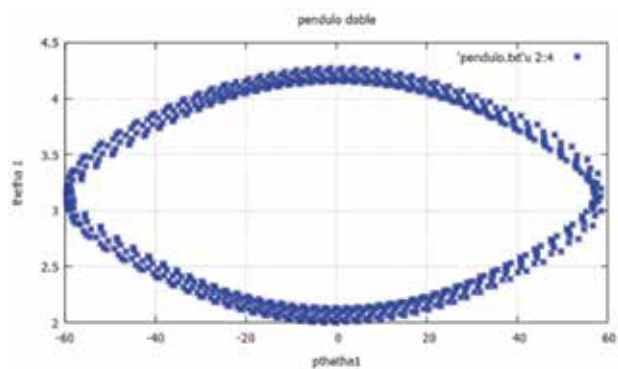


Ilustración 18. Gráfica de $P\theta_1$ contra θ_1

En el caso que θ_1 está en posición cero y θ_2 en un ángulo diferente de cero, $m_1 = 7$ y $m_2 = 11$, significa que los movimientos van a tener un desfase tanto en los ángulos como en las coordenadas generalizadas publicadas a continuación.

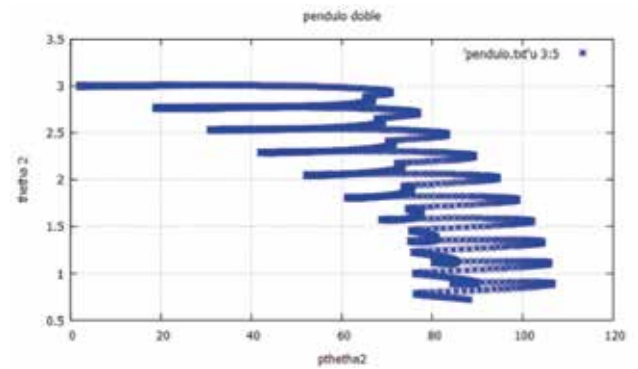


Ilustración 20. Gráfica de $P\theta_2$ contra θ_2

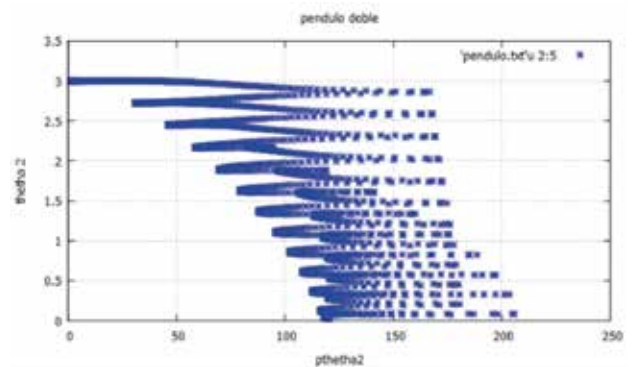


Ilustración 21. Gráfica de $P\theta_1$ contra θ_2

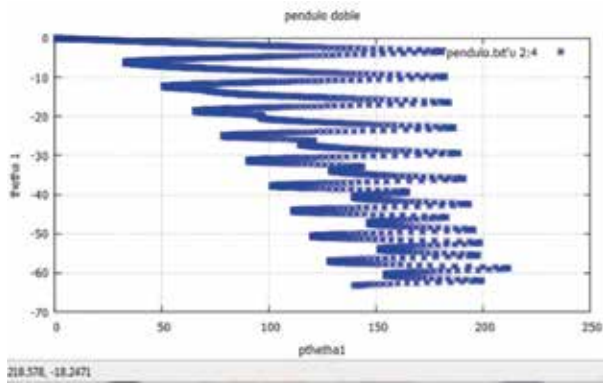


Ilustración 22. Gráfica de $P\theta_1$ contra θ_1

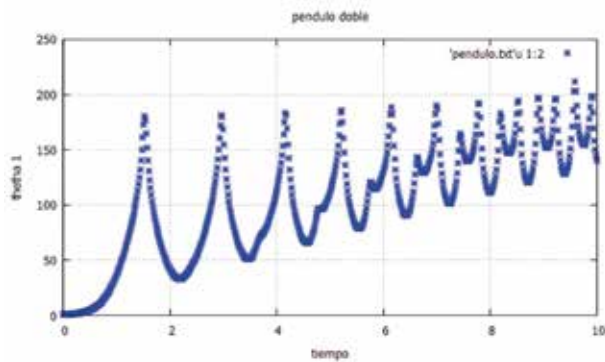


Ilustración 23. Gráfica de $P\theta_1$ contra t

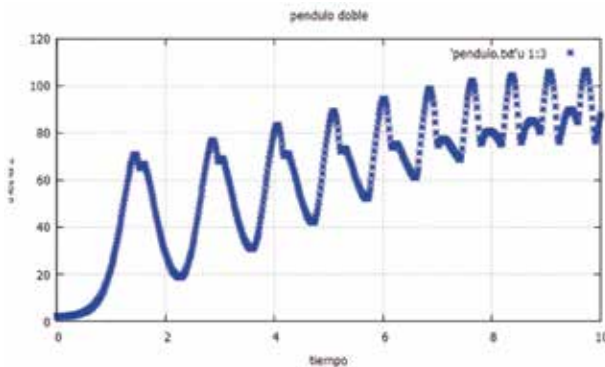


Ilustración 24. Gráfica de $P\theta_2$ contra t

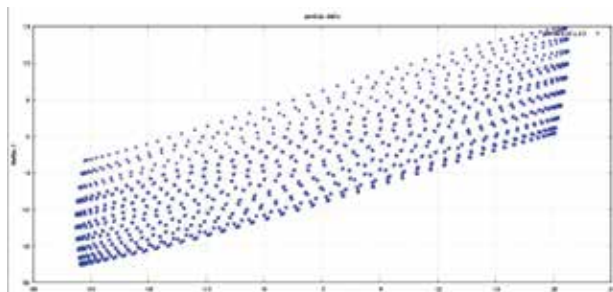


Ilustración 25. θ_2 vs. θ_1

Con el fin de tener una mirada cercana al comportamiento del sistema, se procede a utilizar Modellus, en el primer caso, se supone que m_2 es despreciable, por tanto, $m_1 > m_2$ y se obtiene la ilustración 27. Se infiere por consiguiente que el comportamiento es similar al del péndulo simple, cuyo retrato de fase (ilustración 26) es igual a la modelación de C++.

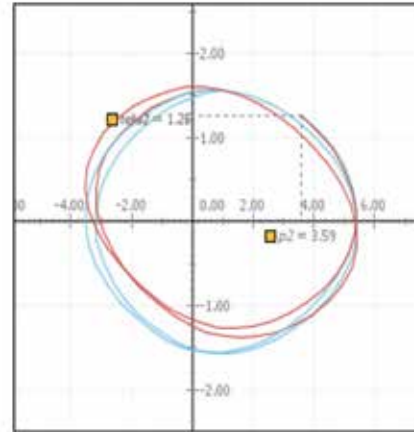


Ilustración 26. Retrato de fase de θ_1 y θ_2 vs. $P\theta_1$

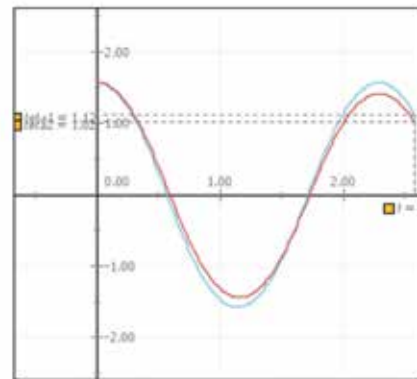


Ilustración 27. Modellus. $m_1=20$, $m_2=1$. θ_1 y θ_2 Vs tiempo

Cuando $m_1 = 60$ y $m_2 = 10$, se obtiene la siguiente ilustración, en cuanto al retrato de fase, (ilustración 28), se puede inferir que al ser un sistema caótico el retrato de fase para m_1 , azul, diverge en menor grado que para m_2 , rojo; lo cual es debido al efecto que m_1 realiza sobre m_2 .

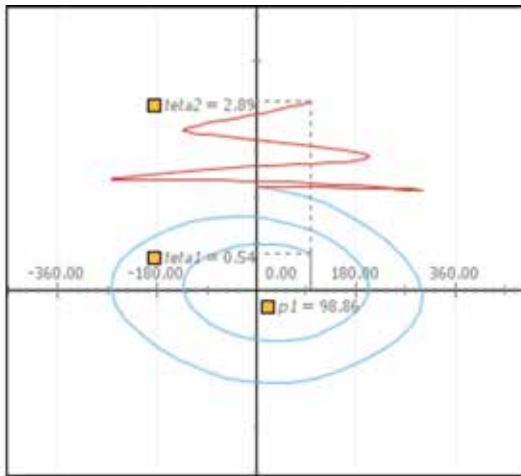


Ilustración 28. $m_1 = 60$ $m_2 = 10$ θ_1 y θ_2 vs. $P\theta_1$

En el caso $m_1 = m_2$, el retrato de fase toma la siguiente forma (ilustración 29). El movimiento no es armónico y en momentos hay un desfase de θ_1 mayor que el observado en la ilustración 28, lo cual indica que a medida que se hacen cambios de las configuraciones iniciales, el sistema evoluciona a un comportamiento más inestable. Se observa el comportamiento de m_2 , en las ilustraciones 28 y 29, y se hace evidente como afecta el movimiento de m_1 .

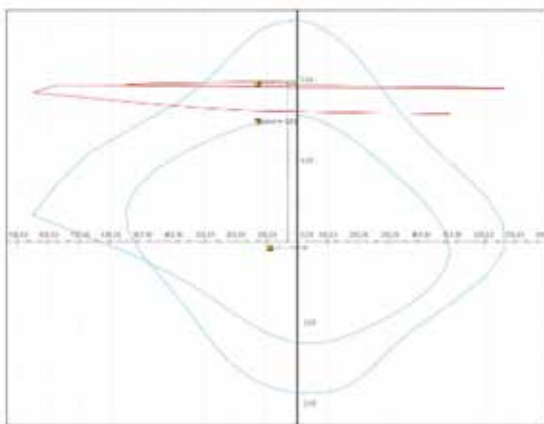


Ilustración 29. $m_1 = m_2$ θ_1 y θ_2 vs. $P\theta_2$

Para el mismo caso en el que $m_1 = m_2$ se obtuvieron las siguientes ilustraciones con respecto a $P\theta_2$:

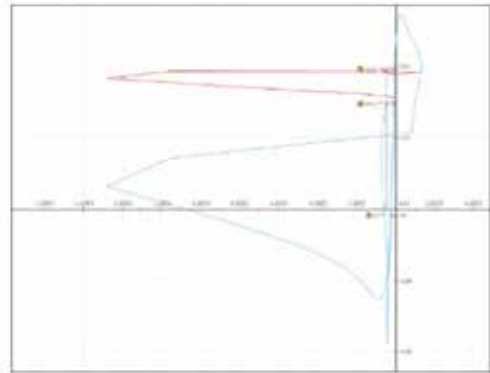


Ilustración 30. $m_1 = m_2$ $P\theta_2$ vs. tiempo

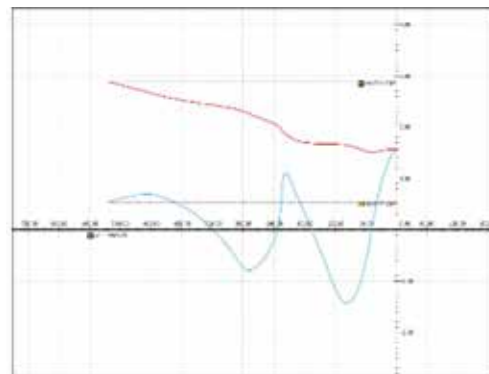


Ilustración 31. $m_1 = 60$ y $m_2 = 10$ θ_1 y θ_2 vs. t

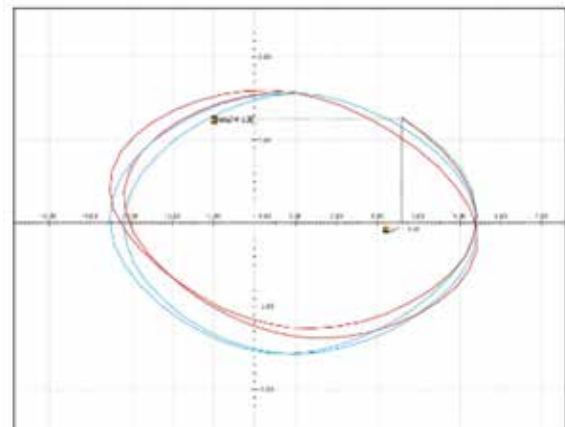


Ilustración 32. $m_1 = 60$ y $m_2 = 1$ θ_1 y θ_2 vs. $P\theta_2$

Las ilustraciones 27 y 32 evidencian la similitud en los momentos generalizados, sin embargo, a medida que m_2 o m_1 van cambiando de valores el sistema se ve afectado, una muestra de ellos son las ilustraciones 30 y 31, las cuales manifiestan el efecto de m_2 sobre m_1 , con relación al momento generalizado $P\theta_2$.

Consideraciones finales

La descripción del sistema péndulo doble muestra un comportamiento diferente a lo esperado bajo las condiciones iniciales que se le asignaron, es decir, tiene desplazamientos independientes, pues no depende de las condiciones que se le asignan en un primer momento, de tal suerte que:

Las trayectorias tienden a ser divergentes.

Solamente estarán sincronizados los movimientos cuando m_1 sea mayor que m_2 , es decir, que m_2 sea igual a 1. Por ejemplo, las ilustraciones 26 y 32 tienen una similitud al espacio de fases del movimiento armónico simple.

La perspectiva hamiltoniana permite observar el péndulo doble desde la noción de sistema, a partir de la evolución con respecto al tiempo, esto sin importar que en los cambios de las masas se muestre que los espacios de fases presentados anteriormente dan cuenta de una tendencia hacia lo caótico (ilustraciones 28 a 30).

De la descripción física obtenida de las modelaciones, *Modellus* y C++, se nota como se desprecian ciertas características de la configuración inicial del sistema. Un sistema dinámico toma en cuenta todos los aspectos del sistema, ya que, para su estudio, se consideran los más mínimos detalles, movimientos y acciones para efectuar los cálculos, a diferencia de la mecánica newtoniana.

En cuanto a las gráficas se debe mencionar que el aparente tratamiento que se le da al sistema pareciera en algunos casos el de un movimiento amortiguado, esto se debe quizás a la modelación y programación empleada, pues la energía del sistema siempre debe ser la misma, dado que es un sistema conservativo, caso opuesto a lo que se muestra en las ilustraciones, que no hay conservación de la energía, es decir, que es un sistema disipativo, puesto que al estar modelado en función del tiempo la energía no se conserva.

Trabajos consultados

Ayala, M. M., & Barragan, J. E. (2014). Lectura II. El Hamiltoniano Del Sistema Y Las Ecuaciones De Hamilton. Bogotá.

Ayala, M. M., & Barragan, J. (2014). Lectura 1 Estado Mecanico De Un Sistema 2 2014. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Notas De Clase Sistemas Dinámicos, 2014.

ACERCA DE LA SERIE PRE•IMPRESOS

La serie *Pre•Impresos Estudiantes* es un proyecto de la Facultad de Ciencia y Tecnología (FCT) de la Universidad Pedagógica Nacional que divulga a través de la comunicación escrita la producción intelectual de los autores, destacando sus experiencias y reflexiones respecto de los temas inherentes a sus campos disciplinares específicos y su enseñanza. Por tanto, configura un espacio de visibilidad y reconocimiento público del trabajo de los maestros en formación y en ejercicio adscritos a la FCT.

La escritura en el ámbito de las ciencias y la tecnología

La comunicación es un aspecto fundamental de los procesos de cognición que construye relaciones de fuerza e identificación entre las personas y define el lugar de cada individuo en un grupo. Así, toda relación social se funda en el intercambio de ideas, pues cuando hablamos y escribimos también damos forma al mundo. Por tanto, la conformación de comunidades académicas tiene un carácter social y comunicativo, proceso en el que la palabra escrita contribuye a la socialización de las ideas; dado que, la comunicación de la ciencia se realiza en lengua natural.

¿Qué es un Pre•Impreso?

Los Pre•impresos son una publicación previa que se utiliza en las comunidades académicas para difundir el trabajo de sus miembros, contribuir a la formación de futuros investigadores y apoyar la cualificación de sus procesos escriturales.

Origen

Este proyecto editorial también constituye un espacio académico de formación y cualificación docente, que se inspiró en un trabajo similar que realiza el grupo *Física y Cultura* del Departamento Física de la FCT, con trabajos de profesores, desde principios de la década de 1990, con el fin de promover la circulación de las ideas de los profesores adscritos a este grupo de investigación.

Objetivos

Pre•Impresos Estudiantes promueve el fortalecimiento de la actividad académica en dos dimensiones; como **proceso de formación escritural** de los futuros maestros de ciencias, matemática y tecnología, y como **iniciativa editorial** que se traduce en una publicación seriada que divulga la producción intelectual de los estudiantes de la FCT.

El carácter del proceso realizado y el acompañamiento escritural que se brinda desde el proyecto hacen de esta experiencia una actividad académica de formación docente, con proyección en la práctica pedagógica e investigativa que contribuye a:

- Apoyar los fines misionales de la Universidad de investigar, producir y difundir conocimiento profesional docente, educativo, pedagógico y didáctico, además de propiciar una interacción con la sociedad para aportar a la construcción de nación.
- Propiciar una mayor consciencia lingüística, al poner de relieve la relación entre ciencia y lenguaje en el proceso de construcción textual, que requiere el desarrollo de la capacidad discursiva y habilidades comunicativas.
- Fortalecer la comunidad académica de la Facultad, al visibilizar las líneas de trabajo de los grupos de investigación de las diferentes unidades académicas.

Características

Pre•Impresos Estudiantes es un proyecto institucional de carácter extra curricular en el que pueden participar los estudiantes de los diferentes programas de la Facultad que quieran vincularse, ya sea, de manera individual o en grupo. El proceso de acompañamiento que se brinda exige compromiso y disciplina de los participantes, para la cualificación de su proceso escritural. Los temas a trabajar pueden cobijar una amplia gama de aspectos relacionados con las disciplinas —las ciencias, la matemática, la tecnología— y su enseñanza, así como, con la educación en general, ya sean reflexiones de carácter epistemológico o pedagógico, entre otras posibilidades.

Se puede participar con un amplio tipo de formatos de escritura, como por ejemplo: artículos, ponencias, módulos didácticos, cartillas, ensayos, crónicas, experiencias de aula, diarios, informes de investigación, por solo mencionar algunos. El proceso de elaboración, edición y publicación final de cada documento se ajusta al tiempo requerido por los autores para culminar esta labor. La publicación se hace en forma de cuadernillos monográficos en formato digital e impreso. La convocatoria es permanente.

Sobre los Autores



German Andrés Cuellar Estévez. Egresado del Colegio Nacionalizado Departamental de Funza (2008), técnico profesional en comercio exterior de la Universidad de Los libertadores (2010), estudiante de último semestre de la Licenciatura en Física de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN), adscrito a la línea de profundización “Enseñanza de las ciencias desde una perspectiva cultural”. En el marco del coloquio “Encuentros y desencuentros: un espacio reflexivo para la ciencia”, asistió a las conferencias sobre el *Modelo relativista para un sistema satelital de navegación global* y *La filosofía, física y enseñanza de las ciencias*. Participó en el coloquio *La revolución de Einstein*, Universidad de los Andes (2016). Su trabajo de grado se titula “Entropía, aproximaciones a la enseñanza bajo una mirada de procesos de transformación”. Entre sus intereses en el campo disciplinar están el análisis sistemático de los fenómenos térmicos, la transferencia y transformaciones de energía, el orden y el desorden en sistemas físicos y el estudio de los fenómenos naturales desde una perspectiva histórica y filosófica. También le interesan la interpretación y producción musical, el apoyo a comunidades en condiciones de vulnerabilidad y el estudio del sistema económico nacional e internacional.



Walter Loren García Cruz. Egresado de la I.E.D. Pablo Sexto del municipio de Sopó, Cundinamarca. Técnico profesional en mantenimiento de computadores, SENA (2009), estudiante de décimo semestre de la Licenciatura en Física de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN). Participó en Expociencia y Expotecnología 2015 con los prototipos de un medidor de pasos para la enseñanza del movimiento rectilíneo uniforme y de un medidor de rapidez para la enseñanza del movimiento circular uniforme. Fue ponente en el VII Congreso Nacional de Enseñanza de la Física, 1ª Escuela Latinoamericana de las ciencias y la astronomía, Santiago de Cali, 2014, con el diseño de la página web sobre el Museo virtual del Departamento de Física (DFI) de la UPN. En el año 2015 participó en el Salón de la ciencia del DFI de la UPN con el diseño experimental del levitador magnético y, en 2016, con el prototipo del medidor de la aceleración de la gravedad. Su trabajo de grado se titula “Diseño y construcción de un prototipo para el estudio de la caída de los cuerpos: Medición de la aceleración de la gravedad por medio de Arduino”. Entre sus intereses se cuentan la enseñanza de la física desde una perspectiva histórico-crítica, la electrónica, el diseño de aplicaciones y, en general, el uso de herramientas tecnológicas en la educación. Es aficionado al diseño gráfico, las artes plásticas y los deportes de alto rendimiento: ciclismo, atletismo y natación.

<http://revistas.pedagogica.edu.co>